01 Ex 2 : 1) Note : 3.5

Exercice 2 :

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ tq $f(P) = P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$

1) La base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est : $(1, X, X^2)$

$$\text{Dim}, \quad \text{Mat}_{\mathbb{R}_2[X]}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$

$f(1) = 1 + 1 - 2 = 0$

$f(X) = X + 2 + X - 2X - 2 = 0$

$f(X^2) = (X+2)^2 + X^2 - 2(X+1)^2$

$= X^2 + 4X + 4 + X^2 - 2X^2 - 4X - 2$

$= 2$

Attention au développement du carré : $(X+2)^2 \neq X^2 + 2^2$ car $(X+2)^2 = X^2 + 4X + 4$ et $X^2 + 2^2 = X^2 + 4$. Les deux termes de droite ne correspondent pas du tout.

01 Ex 2 : 2) Note : 4.0

2) On cherche une autre base B de $\mathbb{R}_2[X]$ tq $\text{Mat}_{B}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Posons $B = (e_1, e_2, e_3)$

On veut $f(e_1) = 0$ $f(e_2) = 0$ $f(e_3) = 0$

Prenons $e_1 = 1$

donc $f(e_1) = 1$

D'après la question précédente, $f(X^2) = 2$ donc $\frac{1}{2} f(X^2) = 1$ donc $f\left(\frac{X^2}{2}\right) = 1$

donc $e_2 = \frac{1}{2} X^2$

Enfin, on veut $f(e_3) = 0$ donc $e_3 \in \text{Ker} f$

Mais, $\text{Ker} f = \text{Vect}(1, X)$

On peut donc prendre $e_3 = X$ car si on prenait $e_3 = 1$, la famille (e_1, e_2, e_3) serait pas libre

d'où, $B = \left(X, \frac{1}{2}X^2, 1\right)$

Exercice 3 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

02 Ex 2 : 1) Note : 1.5

Exercice 2

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ tq $f(P) = P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$

1) $\text{Mat}_{\mathbb{R}_2[X]}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$

$f(1) = 1 + 1 - 2 = 0$

$f(X) = X + 2 + X - 2X - 2$

$= 4X + 4$

$f(X^2) = (X+2)^2 + X^2 - 2(X+1)^2$

$= X^2 + 4X + 4 + X^2 - 2X^2 - 4X - 2$

$= -2X + 2$

Erreur de signe dans le calcul de $f(X^2)$: le coef de $-2X$ est $+2$ et non -2 car $-2(X+1) = -2X - 2$ et non $-2X + 2$. Ce qui change le résultat.

Erreur dans le développement de $(X+2)^2$ qui est égal à $X^2 + 4X + 4$ et non $X^2 + 2^2 = X^2 + 4$. Attention à ne valoir retenir pour $f(X^2)$.

02 Ex 2 : 2) Note : 1.0

Les conditions initiales portent sur les vecteurs de la base ou sur $\dim$

2) On cherche une base de $\mathbb{R}_2[X]$

de noyau (e_1, e_2, e_3) tq $e_1, e_2, e_3 \neq 0$.

tq $f(e_1) = e_1$ et $e_1, e_2 \in \text{Ker} f$, $e_3 \in \text{Im} f = \text{Ker} f$

On prend alors e_1, e_2, e_3 ne tel valeur si on veut ainsi que la famille est libre.

On cherche $\text{Ker} f$. $\begin{cases} x = \left(\frac{x}{2}\right) \\ \text{car } \frac{x}{2} \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x_2 + 2x = 0 \\ 4x_2 - 2x = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

Donc $e_2 = \frac{1}{2}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}_2$

$e_2, e_3 \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

on prend $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ car les 2 vecteurs sont libres

Le noyau est $\text{Vect}(e_2)$ car on sait que par la théorie du rang, on verra plus avec une valeur propre à optimiser. Étant donné que $e_1 \in \text{Ker} f$, on a forcément $f(e_1) = 0$ soit $\lambda e_1 = 0$.

Vous devriez montrer e_1, e_2, e_3 dans $\text{Ker} f$. Or si $e_1 \in \text{Ker} f$, alors $f(e_1) = 0$, ce qui contredit forcément vos conditions de départ $f(e_1) = e_1 \neq 0$.

03 Ex 2 : 1) Note : 3.0

Exercice 2 :

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ $f(P) = P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$

$B = \mathbb{R}_2[X] = (1, X, X^2)$

1.

$$\text{Mat}_{B}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$

$f(1) = 0$

$f(X) = X + 2 + X - 2(X+1)$

$= 0$

$f(X^2) = (X+2)^2 + X^2 - 2(X+1)^2$

$= X^2 + 4X + 4 + X^2 - 2X^2 - 4X - 2$

$= 2$

Petite erreur de calcul ici : le développement de $(X+2)^2$ est $X^2 + 4X + 4$ et non $X^2 + 2^2 = X^2 + 4$. Le reste des raisonnements (la méthode pour trouver la matrice) est tout à fait correct.

03 Ex 2 : 2) Note : 1.5

2. On cherche $B = (e_1, e_2, e_3)$ tq

$\text{Mat}_{B}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Alors $f(e_1) = 0$ $f(e_2) = 0$ $f(e_3) = 0$

Comme $\text{Im} f = \text{Vect}(e_3)$ $f(e_1) \in \text{Vect}(e_3)$

On a $f(e_1) \in \text{Vect}(e_3)$

Donc $e_1 = \text{Vect}(e_3)$

Comme $\text{Im} f = \text{Vect}(e_3)$. Alors quelque soit e_2, e_3

On aura $f(e_2) \in \text{Vect}(e_3)$ car les deux produits bruts.

On prend donc $e_2 \in \text{Vect}(e_3)$ différent de e_1 $\mathbb{R}_2[X]$ $e_2 \neq e_1$

Vous ne donnez pas de base explicite à la fin. De plus votre proposition de construction de la base ne fonctionne pas : comme l'image de f est engendrée par les polynômes constants, $e_2 = f(e_3)$ sera une constante. Ainsi, en prenant $e_1 = X$, les vecteurs e_1 et e_2 seront forcément à la famille (e_1, e_2, e_3) est sera pas libre.

On pose $e_3 = f(e_2)$ et $e_2 = 1$

Alors $f(e_2) = 0$ ✓

$e_2 \in$

Exercice 2 :

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

04 Ex 2 : 1) Note : 4.0

Ex 2 : $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ $B_{\text{can}}(\mathbb{R}_2[X]) = (1, X, X^2)$

1) ① $f(P) = 1$ ② $f(P) = X$

$f(1) = 1 + 1 - 2 = 0$ $f(X) = X + 2 + X - 2(X+1)$

$= 0$

③ $f(P) = X^2$

$f(X^2) = (X+2)^2 + X^2 - 2(X+1)^2$

$= X^2 + 4X + 4 + X^2 - 2X^2 - 4X - 2$

$= 2$

Donc $\text{Mat}_{B_{\text{can}}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Le vecteur e_1 doit appartenir à $\text{Ker} f$. D'après la première question, $\text{Im} f = \text{Vect}(1)$, donc la polynôme X ne convient pas. Il est seulement dans $\text{Im} f$.

Prendre $X \in \text{Im} f$ impossible d'avoir $e_2 = X$ car on a besoin de $\text{Ker} f$. Il faut par exemple choisir $e_2 = X + 1$ car on a besoin vraiment pour $f(X^2)$.

04 Ex 2 : 2) Note : 1.5

2) On veut $\text{Mat}_{B}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Donc $f(e_1) = e_3$

$f(e_2) = 0$

$f(e_3) = 0$

$B = (e_1, e_2, e_3)$

Donc $e_1, e_2, e_3 \in \text{Ker} f$.

$f(e_1) = e_3 \in \text{Im} f$.

Donc $\text{Im} f = \text{Vect}\, e_3$ $e_3 \in \text{Im} f \cap \text{Ker} f$.

or $f^2(e_1) = 0$

$\boxed{\text{Choisir } e_1 = X}$ $f(e_1) = 0$ $\boxed{e_2 = \text{tq } f(e_2) = X}$

$e_2 = 1$ $f(e_2) = 0$ $\boxed{e_2 = X}$

Le vecteur e_1 doit appartenir à $\text{Ker} f$. D'après la première question, $\text{Im} f = \text{Vect}(1)$, donc la polynôme X ne convient pas. Il est seulement dans $\text{Im} f$.

Prendre $X \in \text{Im} f$ impossible d'avoir $e_2 = X$ car on a besoin de $\text{Ker} f$. Il faut par exemple choisir $e_2 = X + 1$ car on a besoin vraiment pour $f(X^2)$.

05 Ex 2 : 1) Note : 4.0

Exercice 2 :

1) Posons $f = (1, X, X^2)$

$$\text{Mat}_{B_{\text{can}}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

05 Ex 2 : 2) Note : 1.5

Vous avez compris les conditions que devront vérifier les vecteurs de la base, et votre construction théorique est correcte. Cependant, il faut appliquer cette méthode à l'endomorphisme f de l'énoncé et donner explicitement les trois polynômes e_1, e_2, e_3 qui forment votre base.

2) On cherche $B = (e_1, e_2, e_3)$ tel que

$\begin{cases} f(e_1) = 0 \\ f(e_2) = e_1 \\ f(e_3) = e_2 \end{cases}$

On a $\text{Im} f = \text{Vect}\, e_1$, donc $\text{rg} f = 1$.

D'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker} f = 2$

On cherche à comprendre quel $e_1 \in \mathbb{R}_2[X]$, $e_1 \neq 0$ et $e_1 \neq e_2$

tels que $e_1, e_2 \in \text{Ker} f$. On a alors $f(e_1) = 0$ et $f(e_2) = 0$. On cherche e_2 $e_1 \neq$ de telle que $f(e_2) = e_1$

(e_1, e_2, e_3) est une base car sinon $\exists$ contradiction $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $e_1 = \lambda e_2$.

Alors $f(e_1) = \lambda f(e_2) = 0$ or $f(e_1) = e_1 \neq 0$

donc $\lambda = 0$. Donc (e_1, e_2, e_3) est une base.

$\text{Vect}(e_1, e_2) \oplus \text{Vect}(e_3)$ car :

soit $x \in \text{Vect}(e_1, e_2) \cap \text{Vect}(e_3)$, alors $\exists$ scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

tq $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = \lambda_3 e_3$

or $\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) = \lambda_3 f(e_3)$

or $\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) = 0$

or $(f(e_1), f(e_2))$ est une base donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

donc $x = 0$

D'où (e_1, e_2, e_3) est une base qui convient.

Ex 3 :

06 Ex 2 : 1) Note : 4.0

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ $f(P) = P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$

$B = B_{\text{can}}(\mathbb{R}_2[X]) = (1, X, X^2)$

1. Soit $\text{Mat}_{B}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$

$f(1) = 0$

$f(X) = X + 2 + X - 2(X+1)$

$= 0$

$f(X^2) = (X+2)^2 + X^2 - 2(X+1)^2$

$= X^2 + 4X + 4 + X^2 - 2X^2 - 4X - 2$

$= 2$

Petite erreur de calcul ici : le développement de $(X+2)^2$ est $X^2 + 4X + 4$ et non $X^2 + 2^2 = X^2 + 4$. Le reste des raisonnements (la méthode pour trouver la matrice) est tout à fait correct.

06 Ex 2 : 2) Note : 2.5

2. On cherche $B = (e_1, e_2, e_3)$ tq $\text{Mat}_{B}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On prend $e_1 = 1$ donc $f(e_1) = 0$

On veut $f(e_2) = e_1$ donc $e_2 \in \text{Im} f$ et $e_2 \in \text{Ker} f$

donc $e_2 \in \text{Ker} f$ donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $e_2 = \lambda e_3$. On prend $\lambda = 1$

donc $e_2 = e_3$ $f(e_2) = e_1$ donc $e_1 \in \text{Im} f$.

Or $e_1 \in \text{Im} f$ $e_1 = 1$ $f(1) = 0$ $e_1 \neq 0$ $\text{Im} f$ et

de même démarche que $\mathbb{R}_2[X]$. Donc cette base fonctionne

Exercice 3 :

Soient $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$

07 Ex 2 : 1) Note : 4.0

Ex n°2 :

1.

$$\text{Mat}_{B}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$

07 Ex 2 : 2) Note : 1.0

Il faut donner explicitement les polynômes (e_1, e_2, e_3) qui forment la base de $\mathbb{R}_2[X]$. Ce polynôme e_1 n'est pas été déterminé.

2. On cherche une base $(e_1, e_2, e_3) = B$

tq $f(e_1) = e_2$ $e_2, e_3 \in \text{Ker} f$ avec

et $\text{Im} f \subset \text{Vect}\, e_3 = \{\lambda e_3, \lambda \in \mathbb{R}\}$

On pose $e_3 \neq 0$ car on a de plus $\text{Im} f \subset \text{Vect}\, e_3$

$\Rightarrow f(e_3) = \lambda e_3 = 0$ car $e_3 \in \text{Ker} f$

Si pour $e_3 \neq 0$ d'où $\lambda = 0$

$e_3 \in \text{Ker} f \Rightarrow e_3 \in \text{Vect}(1, X)$

Si pour $e_3 \in \text{Im} f \Rightarrow e_3 \in \text{Vect}(1)$

$\Rightarrow$ où e_3 de la forme $\lambda_3 \left(\frac{X^2}{2}\right)$

on pose $e_3 \neq 0$ $\text{Im} f \subset \text{Vect}\, e_3$

d'après la matrice $\text{Mat}_{B}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

et donc $\text{Vect}\, e_3 = \text{Vect}\, e_3$

$\Rightarrow$ où $\text{Im} f = \text{Vect}\, e_3$

Donc $f(e_1) \neq 0$ car $e_3 \neq 0$ car $e_1 \in \text{Ker} f$.

Vous indiquez que (e_1, e_2) est une base de $\text{Ker} f$ et que $\text{Im} f = \text{Vect}(1)$. Or, d'après la matrice réduite, on voit que $f(e_2) = 0$, $f(X) = 0$.

Petite erreur de calcul ici : le développement de $(X+2)^2$ est $X^2 + 4X + 4$ et non $X^2 + 2^2 = X^2 + 4$. Le reste des raisonnements (la méthode pour trouver la matrice) est tout à fait correct.

08 Ex 2 : 1) Note : 4.0

1. $f(P) = P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$

$f(1) = 1 + 1 - 2 = 0$

$f(X) = X + 2 + X - 2(X+1) = 0$

$f(X^2) = (X+2)^2 + X^2 - 2(X+1)^2 = X^2 + 4X + 4 + X^2 - 2X^2 - 4X - 2 = 2$

$$\text{Mat}_{B_{\text{can}}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$

08 Ex 2 : 2) Note : 1.5

2. $\text{Im} f = \text{Vect}\, e_3$

on cherche une base B tq $\begin{cases} f(e_1) = X^2 \\ f(e_2) = e_3 \\ f(e_3) = X^2 \end{cases}$

On prend un vecteur e_1 non nul et on prend

Exercice 3

La linéarité de la matrice ne se contente de condition sur les images des vecteurs de base et tout n'est correct. Néanmoins, vous vous êtes perdu au cours de route. Il faut bien utiliser l'expression de f sur la matrice trouvée à la question 1) pour identifier exactement les polynômes satisfaisant ces conditions, par exemple en choisissant $e_1 = X^2$.

09 Ex 2 : 1) Note : 4.0

1. $f(P) = P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$

- $f(1) = 1 + 1 - 2 = 0$
- $f(X) = X + 2 + X - 2(X+1) = 0$
- $f(X^2) = (X+2)^2 + X^2 - 2(X+1)^2 = X^2 + 4X + 4 + X^2 - 2X^2 - 4X - 2 = 2$

$$\text{Mat}_{B_{\text{can}}(\mathbb{R}_2[X])}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$

09 Ex 2 : 2) Note : 1

Il est demandé de déterminer explicitement les polynômes de la base, et non seulement de montrer qu'elle existe.

2. On cherche $B = (e_1, e_2, e_3)$ tel que $\text{Mat}_{B}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On prend (e_1, e_2) une base de $\text{Ker} f$ qui existe car $\dim \text{Ker} f = \text{rg} f = 2$

donc $\dim \text{Ker} f = \dim \mathbb{R}_2[X] - \text{rg} f = 3 - 1 = 2$.

Or $\text{Im} f = \text{Vect}\, e_3$ donc $X \in \text{Im} f$ donc $X \in \text{Ker} f$. donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $X = \lambda e_3$. On prend $\lambda = 1$

donc $f(e_3) = e_3$ ce qui est possible car $e_3 \in \text{Im} f$.

La famille (e_1, e_2, e_3) est alors libre car $e_3 \notin \text{Im} f$ et de même démarche que $\mathbb{R}_2[X]$. Donc cette base fonctionne

Exercice 3 :